Curso de Geomática
Aula 2

Prof. Dr. Irineu da Silva
EESC-USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Sistemas de Coordenadas

Determinar a posição de um ponto, em Geomática, significa calcular as suas coordenadas. Calcular as coordenadas de um ponto significa estabelecer a posição desse ponto em relação a um sistema de coordenadas e uma superfície de referência previamente escolhidos, estabelecidos de tal forma que todos os pontos tenham uma posição unívoca e atemporal.

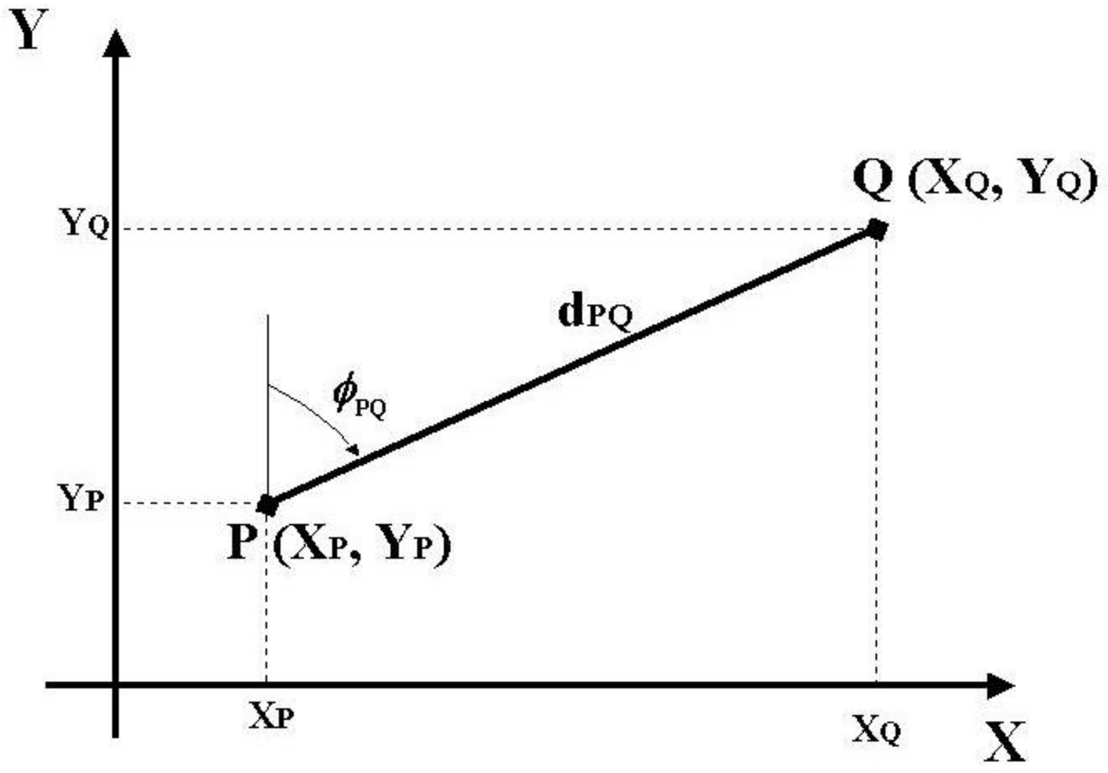
Existem quatro sistemas de coordenadas principais na Geomática:

O Sistema de Coordenadas Cartesiano Plano ou Sistema Plano-retangular
O Sistema de Coordenadas Polar Plano
O Sistema de Coordenadas Cartesiano Espacial
O Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas

Sistema de Coordenadas Cartesiano Plano

O Sistema de Coordenadas Plano-retangular consiste de dois eixos geométricos, localizados num mesmo plano e perpendiculares entre si formando quatro quadrantes, conforme indicado a seguir. O cruzamento dos dois eixos é a origem do sistema. O eixo primário, localizado na horizontal, é denominado abscissa (X). O eixo secundário, localizado na vertical, é perpendicular ao eixo das abscissas e é denominado ordenada (Y). O eixo Y é positivo da origem “para cima” e o eixo X é positivo da origem “para a direita”. As coordenadas retangulares de um ponto são dadas por dois números que correspondem às projeções geométricas deste ponto sobre o eixo das abscissas e sobre o eixo das ordenadas. Ao par de valores (x,y) dá-se o nome de *coordenadas retangulares planas.*

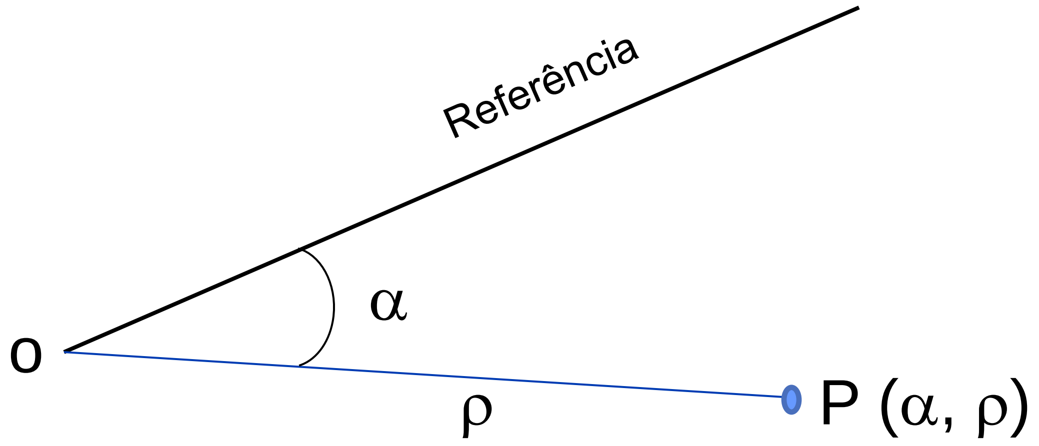
Sistema de Coordenadas Cartesiano Plano Topográfico



Notar a orientação e a referência do angulo ϕ_{PQ}. A esse sistema cartesiano dá-se o nome de sistema cartesiano plano topográfico.

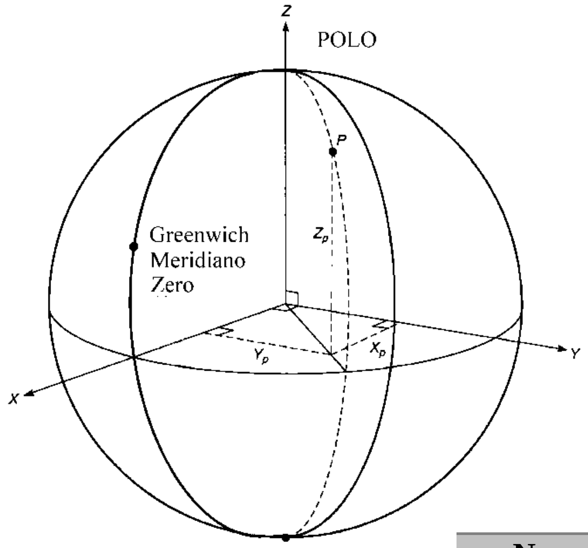
Sistema de Coordenadas Polar Plano

O Sistema de Coordenadas Polar Plano é determinado por um ponto fixo “o”, denominado origem ou pólo, e por uma direção ou eixo passando por esse pólo. A posição de um ponto é definida a partir da indicação de um ângulo α, denominado *ângulo polar*, medido a partir de um eixo de referência, e de uma distância ρ, denominado *raio vetor*, medida a partir da origem (pólo). Ao par de valores (α,ρ) dá-se o nome de *coordenadas polares planas.*



Sistema de Coordenadas Cartesiano Espacial

O posicionamento espacial de um ponto pode ser determinado, em um sistema cartesiano, a partir da adição de um terceiro eixo (eixo Z) ao sistema de coordenadas cartesiano plano ou a partir da adição de um segundo ângulo ao sistema de coordenadas polar plano. No caso do sistema cartesiano, o eixo Z é adicionado perpendicularmente ao plano estabelecido pelos eixos X e Y. Vide figura abaixo.



Exemplos de Coordenadas Cartesianas Geocêntricas de dois pontos situados na cidade de São Carlos (SP), referentes ao elipsóide WGS84

Nome do ponto	**X [m]**	**Y [m]**	**Z [m]**
STTU	3 967 008,233	-4 390 246,457	-2 375 229,496
M-02	3 964 981,293	-4 392 552,674	-2 374 392,149

Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas

Dá-se o nome de Coordenadas Geográficas às coordenadas determinadas sobre uma superfície esférica de referência, na qual os pontos são posicionados em função de valores angulares de arcos medidos convenientemente em relação a essa superfície. Dá-se o nome de Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas ou, simplesmente, Coordenadas Geodésicas, ao sistema de coordenadas geográficas cuja superfície esférica de referência é um elipsóide de revolução definido a partir do estabelecimento de um Sistema Geodésico que o contém.

Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas

Fundamentalmente, o Sistema de Coordenadas Geodésicas baseia-se no eixo de rotação do elipsóide de referência e no plano perpendicular a esse eixo, denominado genericamente de Plano do Equador. Tomando como referência os pólos gerados pelo eixo de rotação, são traçadas linhas (grandes arcos) sobre a superfície de referência passando por esses pólos, as quais são denominadas *meridianos*. Perpendicularmente aos meridianos são traçadas linhas paralelas ao plano do equador, as quais são denominadas *paralelos*. Em seguida, tomando um meridiano particular e o plano do equador como origens, determinam-se arcos sobre a superfície de referência, aos quais se dá o nome de *latitude e longitude geodésicas*. Por serem arcos, a latitude e a longitude são representadas em unidades angulares, mais especificamente, em unidades angulares sexagesimais (graus, minutos e segundos). Em Geomática a latitude é representada pela letra grega ϕ (fi) e a longitude pela letra grega λ (lambda). Vide figura a seguir.

Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas

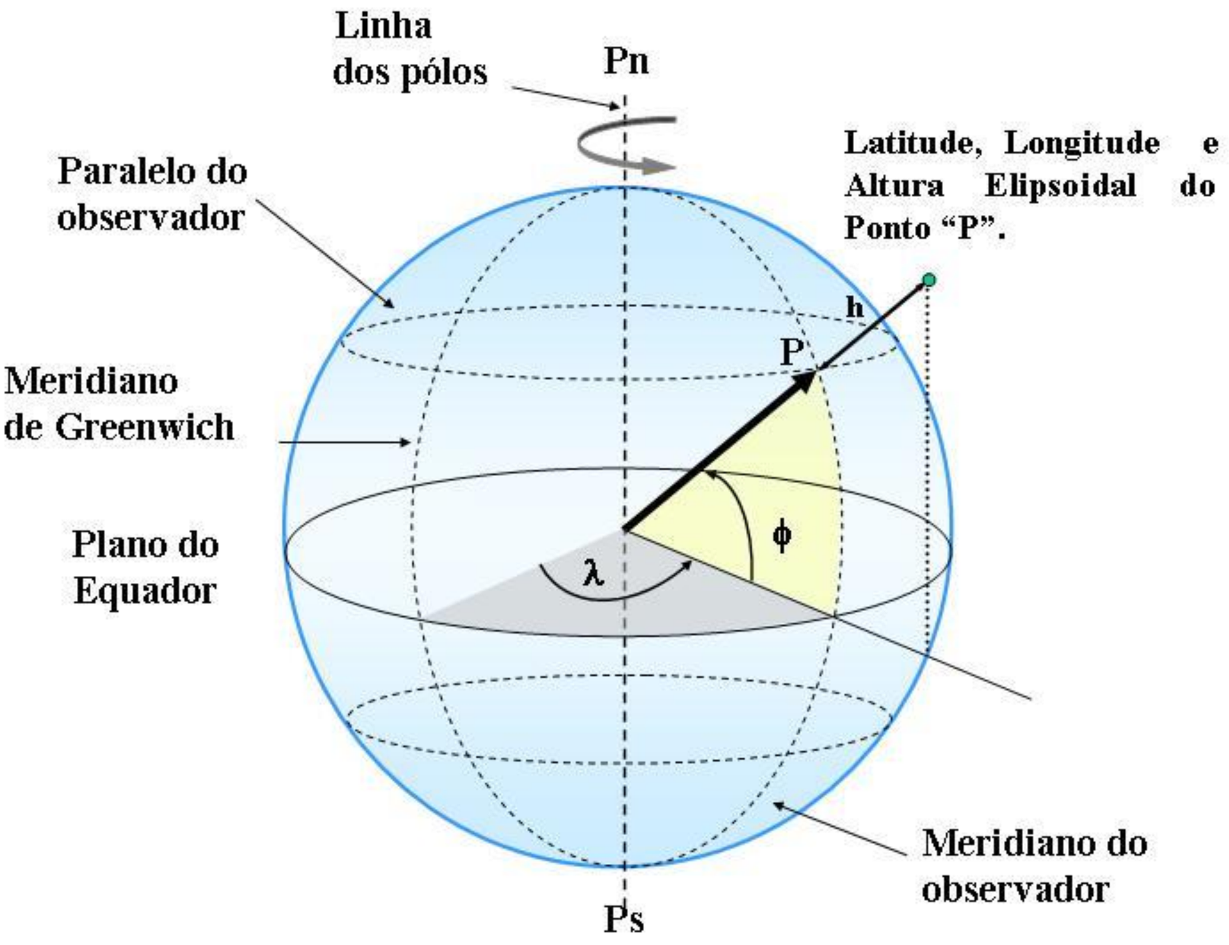
A latitude geodésica ϕ, de um ponto na superfície de referência, é o valor angular do arco formado pela normal a essa superfície, nesse ponto, e o plano do equador.

As latitudes geodésicas são referenciadas a partir do equador de 0° a 90°, no hemisfério norte, e de 0° a -90°, no hemisfério sul, ou simplesmente de 0° a 90° seguido da indicação da palavra Norte ou Sul ou de suas iniciais N e S.

A longitude geodésica λ, de um ponto da superfície de referência, é o valor do ângulo diedro que forma o plano meridiano, que passa pelo ponto, com o plano que passa pelo meridiano de origem.

As longitudes geodésicas são referenciadas a partir do meridiano de origem, de 0° a 360°, na direção Leste, ou de 0° a 180°, na direção Leste, e de 0° a -180°, na direção Oeste.

Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas



Sistema de Coordenadas Geográficas Geodésicas

Exemplos de Coordenadas Geodésicas de dois pontos situados na cidade de São Carlos (SP), referentes ao elipsóide WGS84 (conectados a rede geodésica GPS do estado de São Paulo)

Nome do ponto	Latitude	Longitude	Altura elipsoidal
STTU	-22º 00’ 17,80064”	-47º 53’ 56,99577”	824,577m
M-02	-21º 59’ 48,26444”	-47º 55’ 43,31400”	838,170m

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

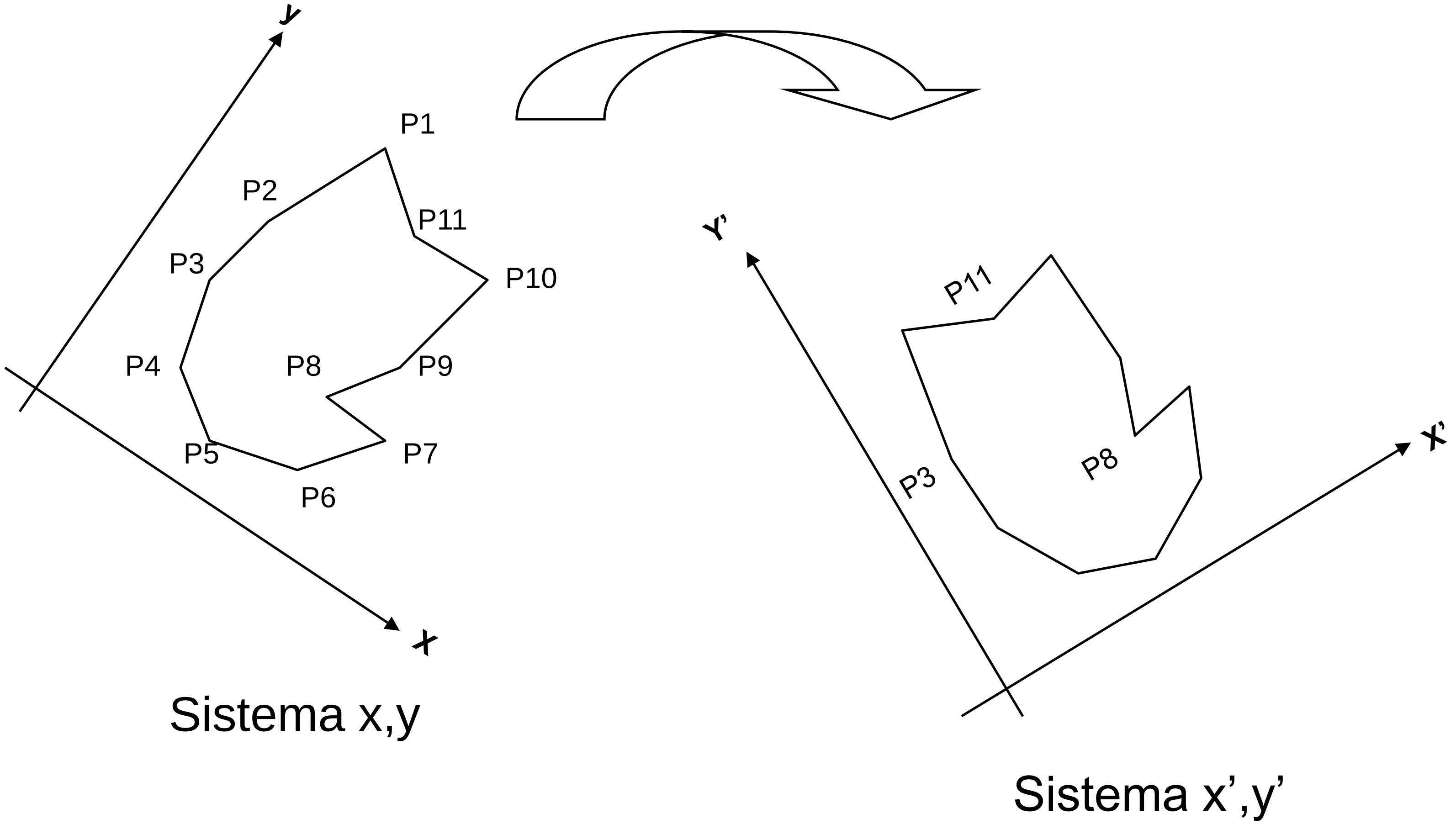
Transformação de Coordenadas

Na Geomática somos constantemente levados a operar com as coordenadas que definem a posição de um ponto no espaço, como vimos anteriormente.

Dependendo da aplicação, o engenheiro optará por um ou outro sistema de coordenadas, de acordo com as facilidades e a utilização de cada um deles. Existem casos, porém, que é necessário converter as coordenadas dos ponto de um sistema para outro ou mesmo indicar as coordenadas de pontos em mais de um sistema. Diz-se nesse caso que se realiza uma **transformação ou uma conversão de coordenadas**.

Define-se assim transformação de coordenadas como sendo uma operação matemática. que consiste em relacionar dois sistemas de coordenadas, com o objetivo de expressar a posição de um ponto, conhecido em um dos sistemas, no outro sistema.

Transformação de Coordenadas



Transformação de Coordenadas Planas

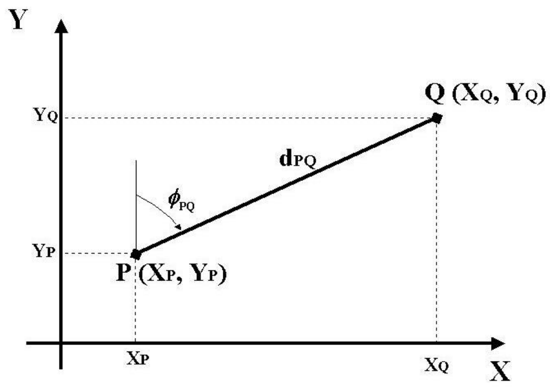
Transformação de coordenadas retangulares em coordenadas polares e vice-versa

O exemplo mais simples de transformação de coordenadas no plano, é a passagem das coordenadas retangulares para coordenadas polares e vice-versa.

Embora simples, essa transformação de coordenadas tem relevância na Mensuração, pelo fato das medições topográficas, no campo, serem realizadas com base em um sistema de coordenadas polar plano.

Transformação de Coordenadas Planas

Formulação matemática para a transformação de coordenadas retangulares em coordenadas polares e vice-versa



$$\phi_{PQ} = \arctan\frac{\Delta_x}{\Delta_y} \pm 180^0$$

$$sen\phi_{PQ} = \frac{\Delta_x}{d_{PQ}}$$

$$d_{PQ} = \sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$$

$$\cos\phi_{PQ} = \frac{\Delta_y}{d_{PQ}}$$

$$d_{PQ} = \Delta_x \cdot cosec\phi_{PQ}$$

$$x_Q = x_P + d_{PQ} \cdot sen\phi_{PQ}$$

$$d_{PQ} = \Delta_y \cdot sec\phi_{PQ}$$

$$y_Q = y_P + d_{PQ} \cdot \cos\phi_{PQ}$$

Notar a orientação e a referência do ângulo ϕ_{PQ}.

Transformação de Coordenadas Planas

Transformação entre Sistemas de Coordenadas Cartesianos Planos

Transformação Ortogonal ou de Similitude – Transformação de Helmert 2D

No caso da transformação de coordenadas entre dois sistemas de coordenadas cartesiano plano (x,y) e (x',y') , existem três passos a serem considerados:

1. Alteração da escala para adequar as dimensões do sistema (x,y) ao sistema (x',y');
2. Rotação dos eixos (x,y) para torná-los paralelos aos eixos (x',y');
3. Translação da origem do sistema (x,y) para coincidir com a origem do sistema (x',y').

Esse tipo de transformação de coordenadas é conhecido também pelo nome de Transformação de Helmert 2D.

Fator de Escala (k)

Seja inicialmente aplicado o fator de escala k aos eixos de sistema (x,y) para torná-lo equivalente, em escala, ao sistema (x',y'). Tem-se assim um novo sistema de coordenadas intermediário equivalente, o qual será denominado (x_1,y_1).

$$X_1 = k.X$$

Onde,

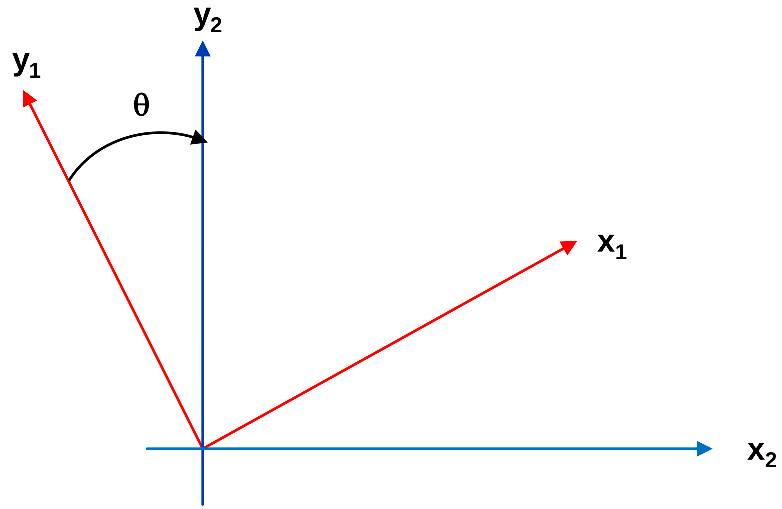
K = escalar

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Transformação de Coordenadas Planas

Após a transformação em escala do sistema (x,y) para o sistema (x_1,y_1), pode ser necessário realizar uma rotação θ do sistema (x_1,y_1) para torná-lo paralelo ao sistema (x_2,y_2) como indicado na figura abaixo.

Rotação dos Eixos



Transformação de Coordenadas Planas

Rotação dos Eixos

De acordo com a figura anterior, mostra-se que a relação entre as coordenadas (x_1,y_1) e (x_2,y_2), devido a uma rotação θ, é dado por,

$$x_2 = x_1 \cos\theta - y_1 sen\theta$$

$$y_2 = x_1 sen\theta + y_1 \cos\theta$$

ou em forma de matriz pela relação $X_2 = R.X_1$

Onde,

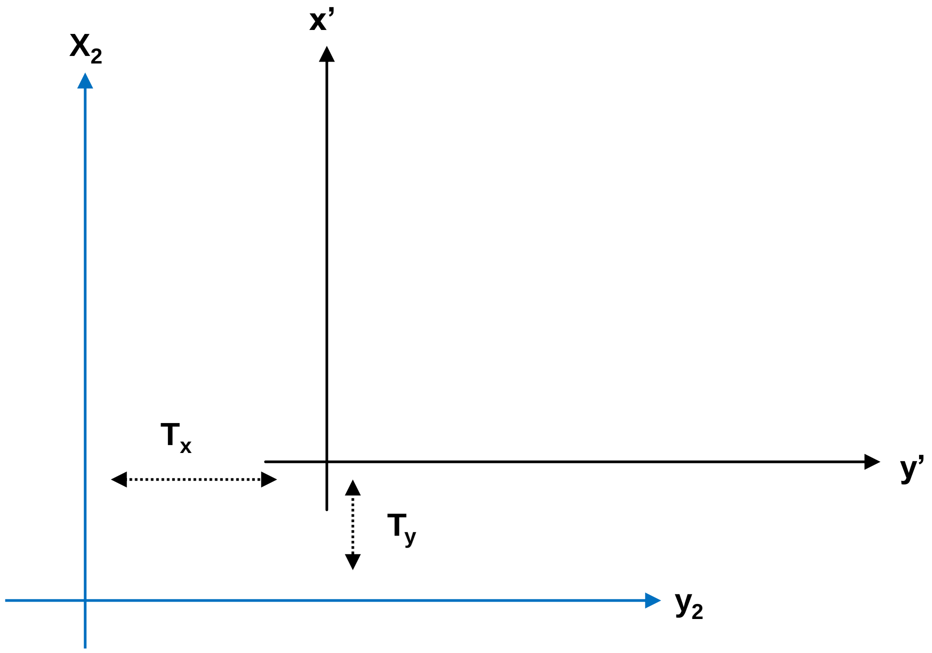
$$X_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

Notar que a matriz de rotação R, indicada acima, é válida para um angulo θ conforme indicado na figura anterior.

Transformação de Coordenadas Planas

Após a rotação do sistema (x_1,y_1), pode ser necessário realizar uma translação da origem do sistema (x_2,y_2) para torná-la coincidente com a origem do sistema (x',y'), como indicado na figura abaixo.

Translação dos Eixos



Translação dos Eixos

De acordo com a figura anterior, conclui-se que se forem aplicadas as translações T_E e T_N, obtém-se a formulação matricial indicada a seguir

$$X' = X_2 + T \qquad \text{ou seja,} \qquad X' = k.R.X + T$$

Onde,

$$T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} \cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix} \qquad \text{(I)}$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Transformação de Coordenadas Planas

Por se tratar de uma transformação de coordenadas com 4 parâmetros de transformação, é necessário que se tenha pelo menos 2 pontos homólogos nos dois sistemas de coordenadas. Cada ponto permitirá escrever duas equações de transformação.

Nos casos em que se têm mais de dois pontos homólogos, a transformação poderá ser efetuada a partir da aplicação de um Método de Ajustamento de Observações ou a partir de uma rotina de cálculo algébrico, que não será tratada neste curso.

Transformação de Coordenadas Planas

Fórmulas para a determinação dos parâmetros de transformação

O desenvolvimento do sistema de equações (I), apresentado anteriormente, produz à formulação algébrica indicada a seguir.

$$x' = k(x \cos\theta - y \,\mathrm{sen}\theta) + c$$
$$y' = k(x \,\mathrm{sen}\theta + y \cos\theta) + d$$

Considerando,

$$a = k.\cos\theta$$
$$b = k.\mathrm{sen}\theta$$
$$c = T_x = \text{translação em x}$$
$$d = T_y = \text{translação em y}$$

Teremos,

$$\begin{aligned} x' &= ax - by + c \\ y' &= bx + ay + d \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Transformação de Coordenadas Planas

Para a solução do sistema de equações (II), consideremos a existência de dois pontos homólogos nos dois sistemas de coordenadas: (x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) e (x_1, y_1), (x_2, y_2). Os quatro parâmetros a serem determinados são o fator de escala *k*, o angulo de rotação θ e as duas translações T_x e T_y, que são descritos pelos elementos a, b, c e d do sistema de equações (II).

Inicialmente, calculemos as diferenças de coordenadas nos dois sistemas, de acordo com as equações a seguir:

$$\Delta_x = x_2 - x_1 \qquad \Delta_{x'} = x'_2 - x'_1$$

$$\Delta_y = y_2 - y_1 \qquad \Delta_{y'} = y'_2 - y'_1$$

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Transformação de Coordenadas Planas

Nestas condições, mostra-se que os elementos **a**, **b**, **c**, **d** e os parâmetros *k* e θ, podem ser calculados pela formulação dada a seguir.

$$a = \frac{\Delta_x \Delta_{x'} + \Delta_y \Delta_{y'}}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \qquad c = x_1' - a x_1 + b y_1$$

$$b = \frac{\Delta_x \Delta_{y'} - \Delta_y \Delta_{x'}}{\Delta_x^2 + \Delta_y^2} \qquad d = y_1' - b x_1 - a y_1$$

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = arctg \frac{b}{a}$$

Transformação de Coordenadas Planas

Exemplo:

Dados:

X_1	632.170
Y_1	121.450
X_2	355.200
Y_2	-642.070
X'_1	1,100.640
Y'_1	1,431.090
X'_2	1,678.390
Y'_2	254.150

Δ x =	-276.97
Δ y =	-763.52
Δ x‘ =	577.75
Δ y‘ =	-1176.94

Cálculo de a

Δx*Δx' =	-160019.4175
Δy*Δy'	898617.2288
Δx^2+Δy^2 =	659675.1713
a=	1,119638639

Cálculo de b

Δx*Δy' =	325977.072
Δy*Δx' =	-441123.68
b=	1.16284618

Cálculo de c

a*x1 =	707.80196
b*y1 =	141.22767
c =	534.066

Cálculo de d

b*x1 =	735.116468
a*y1 =	135.980113
d =	559.993

Cálculo de k

k =	1.61424965

Cálculo de θ

θ =	0.8043259	rad	°	‘	“
	46.084482	graus	46	5	4.1

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

Transformação de Coordenadas Planas

Exemplo (cont):

Dados:

x_A =	1,304.810
y_A =	596.370
x_1 =	632.170
y_1 =	121.450

Calcular:

x'_A =	1,301.495
y'_A =	2,745.006
x'_1 =	1,100.640
y'_1 =	1,431.090

Transformação de Coordenadas Espaciais

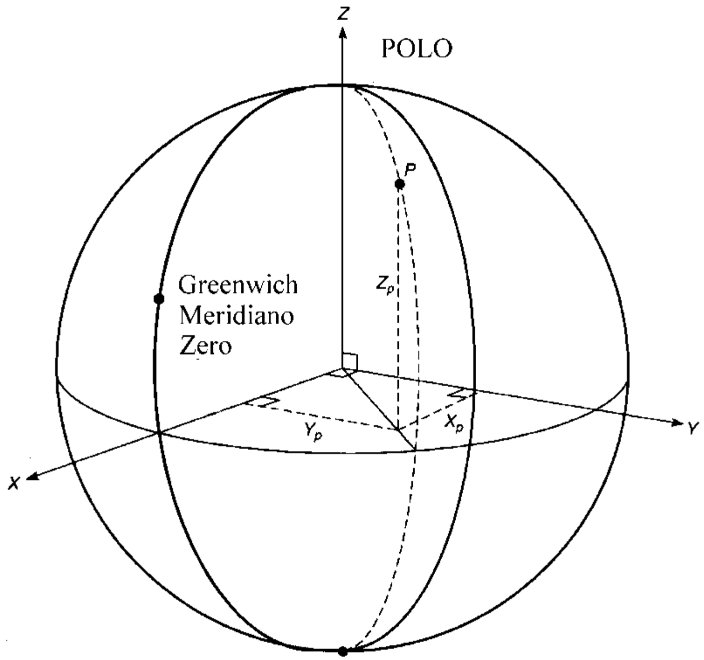
Além da transformação entre sistemas de coordenadas planas, existem também fórmulas para a transformação entre sistemas de coordenadas espaciais.

As transformações mais comuns, neste caso, são as transformações de coordenadas entre dois sistemas cartesianos espaciais e as transformações entre um sistema cartesiano espacial e um sistema de coordenadas geográficas geodésicas e vice-versa.

Neste curso trataremos apenas das transformações entre um sistema cartesiano espacial e um sistema de coordenadas geográficas geodésicas e vice-versa.

Transformação de Coordenadas Espaciais

Transformação de Coordenadas Cartesianas Espaciais em Coordenadas Geográficas Geodésicas e Vice-Versa



Transformação de Coordenadas Espaciais

Transformação de Coordenadas Cartesianas Espaciais em Coordenadas Geográficas Geodésicas e Vice-Versa

As relações entre as coordenadas cartesianas e geodésicas são dadas pelas fórmulas:

Geodésicas para Cartesianas

$$X = (N+h)\cdot\cos\varphi\cdot\cos\lambda$$

$$Y = (N+h)\cdot\cos\varphi\cdot sen\lambda$$

$$Z = (\frac{b^2}{a^2}N+h)\cdot sen\varphi$$

$$N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2 sen^2\varphi}}$$

Cartesianas para Geodésicas

$$\tan\lambda = \frac{Y}{X}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z + e'^2\cdot b\cdot sen^3\theta}{p - e^2\cdot a\cdot\cos^3\theta}$$

$$h = \frac{p}{\cos\varphi} - N$$

$$\tan\theta = \frac{Z\cdot a}{p\cdot b}$$

onde,
X, Y, Z = coordenadas cartesianas
φ, λ = coordenadas geográficas
a = semi-eixo maior do elipsóide de referência;
b = semi-eixo menor do elipsóide de referência;
h = altura elipsoidal

$$p = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$